表示，随处可见

席南华

中国科学院数学与系统科学研究院

July 5, 2010

什么是表示论

所有的数学就是某类表示论。

I. M. Gelfand

All of Mathematics is

some kind of representation theory.

术语的解读

中文：表示

日语：表现

英语：Representation

结论：表示就是把一个对象的某种性质或结构再现于另一个对象上。

术语在数学中的准确含义

表示： 把一个对象的代数结构再现于一个由线性变换（或矩阵）构成的具体对象上。

表示论关注的代数结构主要有：

群、代数、李代数。

表示是一类同态

代数结构由运算确定。

两个数学对象一般通过映射建立联系。

保持运算的映射反映了结构之间的联系，称为**同态**。

表示就是同态，其目标对象由线性变换组成。

表示论大致分成三部分

群的表示论、代数的表示论、李代数的表示论。

群表示：

$$群 \xrightarrow{群同态} \{线性空间的可逆线性变换\}$$

代数表示：

$$代数 \xrightarrow{代数同态} \{线性空间的线性变换\}$$

表示论大致分成三部分-续

李代数表示:

$$\text{李代数} \xrightarrow[\text{同态}]{\text{李代数}} \{\text{线性空间的线性变换}\}$$

有限维表示: 即线性空间的维数有限。

有限维表示的另一形式

群表示:

$$\text{群} \xrightarrow{\text{群同态}} \{\text{某个域上的}n\text{阶可逆方阵}\}$$

代数表示:

$$\text{代数} \xrightarrow{\text{代数同态}} \{\text{某个域上的}n\text{阶方阵}\}$$

李代数表示:

$$\text{李代数} \xrightarrow[\text{同态}]{\text{李代数}} \{\text{某个域上的}n\text{阶方阵}\}$$

群的一维表示I

$$群 \xrightarrow{群同态} \{某个域的非零元\}$$

也称为群的**特征**。

例：

- $GL_n(F) \to F^*, \quad A \to \det A.$
  F：域， $\qquad F^* = F - \{0\},$
  $GL_n(F) = \{F上的n阶可逆方阵\}$

群的一维表示II-例

- 二次互反律中的Legendre符号$\left(\frac{x}{p}\right)$是阶为$(p-1)$的循环群的一个特征。

- 数论中的高斯和：

$$G(\chi,\sigma)=\sum\chi(t)\sigma(t),\quad t\in\mathbb{F}_p^*$$

χ和σ分别是加法群$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{F}_p$和乘法群$\mathbb{F}_p^*$的特征。

群的一维表示III-例

- 实数上的周期函数本质上是单位园周$S = \{e^{ix} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$上的函数。
  S上的平方可积函数全体H是希尔伯特空间. S的特征全体是e^{inx}，$n \in \mathbb{Z}$. 它们构成H的标准正交基。

模的语言

表示的三部分：

- 代数结构A
- 同态
- $\{$线性空间V上的一些线性变换$\}$

定义：

V称为A模，也称为A的表示。

本质：

A的元素线性地作用在V上。

例-高维情形I

- V是$GL(V)$ (V的可逆线性变换全体)的模。
- 多项式环$F[x_1, \ldots, x_n]$是$GL_n(F)$的模。
- 多项式环$F[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{n,n-1}, x_{nn}]$是$GL_n(F)$的模。

例-高维情形II

- 李群在单位元处的切空间是该李群的表示，称为李群的伴随表示。
- 上同调群$H^i(X,\mathcal{L})$是$GL_n(\mathbb{C})$模。

X: 旗流形

其元素是$\mathbb{C}^n$的子空间滤过

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n, \dim V_i = i$$

$\mathcal{L}$: X上的全纯线丛。

例-高维情形III

- $L^2(\mathbb{C})$是$SL_2(\mathbb{C})$ (行列式为1的2×2复矩阵全体)的表示。

- $L^2(G/\Gamma)$是G 的表示，

  G: 李群

  Γ: 离散子群且$\mathrm{Vol}(G/\Gamma)$有限。

特征标的Selberg迹公式。

例-高维情形IV

- 单电子的轨道波函数生成正交群$SO(3)$的表示。
- 单电子的自旋波函数生成酉群$SU(2)$的表示。
- Gell-Mann用$SU(3)$的十维表示预言了Ω^-粒子的存在，被实验证实。

例-箭图的表示

箭图Γ:

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n-1}{\circ} \longrightarrow \underset{n}{\circ}$$

Γ的表示:

$$\{V_i, f_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n-1\}$$

V_i: 域F上的线性空间,

$f_j : V_j \to V_{j+1}$线性变换

就是路径代数$F[\Gamma]$的表示。

表示的基本思想：

对称和线性化

- 代数结构反映了对称性。
- 代数结构的表示给出了代数结构的线性化，也反映了相关线性空间的某种对称性。

表示论的基本问题:

- 什么样的表示是最基本的,
- 一般的表示如何从最基本的表示构建,
- 如何构造最基本的表示,
- 最基本的表示的性质，如分类、维数、特征标等,
- 一些自然得到的表示的性质，等等。

子表示：

A：代数结构（如群、李代数等）

V：A的表示

V的子表示：V的A不变子空间。

例：

$V=\mathbb{C}^n$自然是对称群S_n的表示。

$\{(a,a,...,a)|a\in\mathbb{C}\}$是$V$的子表示。

不可约（单）表示：

零子空间和自身外，无其它子表示。

最基本的表示：

不可约（单）表示

例： • 一维表示

• V是$GL(V)$的不可约表示

• V是$gl(V)$ (V的线性变换全体)的不可约表示

不可约表示-续:

- 次数为i的n元齐次复多项式全体是$GL_n(\mathbb{C})$的不可约表示
- $sl_n(\mathbb{C})$是$GL_n(\mathbb{C})$的不可约表示
- $gl_n(\mathbb{C})$ ($n \times n$复矩阵全体)不是$GL_n(\mathbb{C})$的不可约表示
- $V \otimes V$不是$gl(V)$的不可约表示
- $L^2(\mathbb{C})$是$SL_2(\mathbb{C})$的不可约表示

同态与同构

表示的同态（模同态）：

保持作用的线性映射。

U, V: A的表示（模）

$\phi : U \to V$ 线性映射

$$\phi(au) = a\phi(u), \quad a \in A$$

表示的同构（模同构）：

保持作用的可逆线性映射。

Schur引理

Schur引理:

不可约表示之间的非零同态是同构。

不可约模的分类I

有限群:

定理: 如果表示空间是复线性空间，则

(1) 不可约表示的个数等于有限群的共轭类的个数;

(2) 每一个表示都是不可约表示的直和;

(3) 不可约表示的维数的平方和等于该有限群的阶。

例 — 对称群

- 对称群S_n的复不可约表示的个数是n的划分数$P(n)$。
- 不可约表示的维数可以计算。
- 如果表示空间的基域F的特征$p \leq n$，不可约表示的分类已知。
- 但其它的性质所知甚少，如维数等。这是一个重要的问题。

不可约表示的分类II

单位圆周S:

定理:

$$\{S\text{的不可约酉表示}\} \longleftrightarrow \mathbb{Z},$$
$$e^{inx} \longleftrightarrow n.$$

$$\{\mathbb{Z}\text{的不可约酉表示}\} \longleftrightarrow S.$$

庞德列亚金对偶

(Pontryagin duality)

不可约表示的分类III

定理(Peter-Weyl)： 对紧李群G:

(1) 有限维酉表示的矩阵系数张成的子空间在$L^2(G)$中稠密。

(2) 每个复不可约表示都是酉表示，且维数有限。

(3) 每个酉表示都是完全可约的。

(4) 每个不可约酉表示在$L^2(G)$中出现的重数等于该表示的维数。

定理(Weyl)： 特征标公式。

不可约表示的分类IV

一般线性群：

定理：

$$\{GL_n(\mathbb{C})\text{的有限维不可约表示}\}$$

$$\updownarrow 1-1$$

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \geq a_{i+1}\}$$

不可约表示的特征标（包括维数）由Weyl的公式给出。

不可约表示的分类V

一般线性李代数:

定理:

$$\{gl_n(\mathbb{C})\text{的有限维不可约表示}\}$$

$$\updownarrow 1-1$$

$$\{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n \,|\, a_i \geq a_{i+1}\}$$

不可约表示的特征标（包括维数）由Weyl的公式给出。

不可约表示的分类VI

矩阵代数:

V: 域F上的n维向量空间。

- $\mathrm{End}(V)$ (V上的线性变换全体)的不可约表示只有V本身。
- $M_n(F)$ (F上的$n \times n$全体)的不可约表示只有F^n。

不可约表示的分类VII

再看一般线性群：

定理： $\bar{\mathbb{F}}_p$: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$的代数闭包。

$$\{GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)\text{的有限维不可约表示}\}$$

$$\updownarrow 1-1$$

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \,|\, a_i \geq a_{i+1}\}$$

不可约表示的特征标（包括维数）不清楚。与Schubert簇的奇点有关。

不可约表示的分类VIII

再看一般线性李代数:

定理: $gl_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$的不可约表示都是有限维的。

分类复杂，与Springer纤维关系密切。

维数一般情况不清楚，极其复杂。

不可约表示的分类IX

箭图Γ:

$$\overset{\circ}{1} \longrightarrow \overset{\circ}{2} \longrightarrow \overset{\circ}{3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{\circ}{n-1} \longrightarrow \overset{\circ}{n}$$

- Γ的不可约表示$(1 \leq i \leq n)$:

$$E_i = (0, ..., 0, \underbrace{F}_{i\text{-th}}, 0, ..., 0)$$

- $$\{\Gamma\text{的不可分解表示}\} \updownarrow 1-1 \{GL_{n+1}(\mathbb{C})\text{的正根}\}$$

不可约表示的分类X-无限维表示

定理： $SL_2(\mathbb{C})$的不可约酉表示分类如下：

(a) 平凡表示

(b) 酉主列 ($k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{P}^{k,iy}$$

(c) 补充列 $\mathcal{C}^x$, 此处$0 < x < 2$.

其中仅有的同构关系是

$$\mathcal{P}^{k,iy} \cong \mathcal{P}^{-k,-iy}$$

研究方法

代数

分析

微分几何

代数几何

拓扑

代数方法I

有限群的表示理论

李（超）代数和李群的表示理论

代数群的表示理论

量子群的表示理论

代数的表示理论

代数方法II

有限群的表示理论

G: 有限群；H: 子群；F: 域

$F[G]$: 群代数

研究群代数的性质、诱导表示

$\mathrm{Ind}_H^G V = F[G] \otimes_{F[H]} V$

M: G的表示，$\chi_M : G \to F$

$g \to$ 线性变换的迹

代数方法III

李（超）代数和李群的表示理论

G: 李群；$\mathfrak{g}$: 李代数；$\mathfrak{h}$: 子李代数；

研究普遍包络代数$U(\mathfrak{g})$和诱导表示

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V$$

特征标理论

代数方法IV

代数群和量子群的表示理论

G: 代数闭域k上的代数群
$k[G]$: 坐标代数

考虑$k[G]$的余模和$k[G]$的超代数的表示

量子群的表示
与李代数和代数群的表示理论部分平行

分析方法I

拓扑群、李群的表示理论

G: 局部紧群

X: 局部紧Hausdoff空间，G连续作用在其上，且有G不变的正测度

问题： 如何分解$L^2(X)$到不可约表示

分析方法II

p-adic域上的代数群的表示理论

G：p进群，如$GL_n(\mathbb{Q}_p)$
F：域，如复数域

考虑

$C^\infty(G, F) = \{$局部常值$G \to F\}$

光滑表示

李群的表示

G: 李群，H：闭子群

齐性空间G/H上的几何

代数几何方法I

代数群的表示理论

有限群的表示理论

李代数的表示理论

代数几何方法II

F: 代数闭域，如 $\mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{F}}_p$

G: F上的代数群, 如
$GL_n(F), SL_n(F), Sp_{2n}(F), SO_n(F), \ldots$

研究： $H^i(X, \mathcal{L})$

其中X是有G作用的代数簇
$\mathcal{L}$是X上的G等变向量从。

一个问题：何时$H^i(X, \mathcal{L}) \neq 0$

代数几何方法II

$\mathbb{F}_q$: q元有限域

有限群李型群:

$GL_n(\mathbb{F}_q), SL_n(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q), SO_n(\mathbb{F}_q), \ldots$

有限李型群是代数群的特殊子群:
Frobenius映射的不动点。

利用l-进制上同调构造群的表示:
Deligne-Lusztig理论

代数几何方法III

复半单李代数的表示理论
Kazhdan-Lusztig猜想（1979）

$$\mathrm{chL_w} = \sum_{\mathrm{y}\leq \mathrm{w}} (-1)^{\mathrm{l(w)-l(y)}} \mathrm{P_{y,w}}(1)\mathrm{chM_y}$$

猜想被Beilinson-Bernstein 和
Brylinski- Kashiwara 证明, 1981.
旗流形上的D模理论和反常层理论

拓扑方法I

工具：纤维丛、示性类、上同调、K理论等

拓扑方法II—例

X: 旗流形，$G = GL_n(\mathbb{C})$

$\mathcal{N}$: $\mathbb{C}^n$上的幂零线性变换全体

$Z = \{(\xi, x_1, x_2) \mid \xi x_i = x_i\} \subset \mathcal{N} \times X \times X$

$K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$同构于仿射Hecke代数，

在证明Deligne-Langands关于仿射Hecke代数的猜想中起决定性的作用。

历史I

数论中的特征

有限交换群的表示

有限群的表示

李群和李代数的有限维表示

李群和李代数的无限维表示

历史II-数论中的特征

Gauss：高斯和

《Disquisitiones Arithmeticae》

(《数论研究》,1801)

Dirichlet：L函数(1837)

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{-s}}.$$

历史II-有限交换群的表示

Dedekind: 定义某些有限交换群的特征（1878）

Webber: 定义有限交换群的特征（1881）

《Lehrbuch der Algebra》(1896)

历史III-有限群的表示1

起点：

Dedekind: 有限交换群的群行列式的分解(1880年左右开始考虑)

$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, x_{g_i}: 不定元

行列式$|x_{g_i g_j^{-1}}|$称为G的群行列式

给Frobenius的信（1896）

历史III-有限群的表示2

奠基人：Frobenius

特征标理论，不可约特征标的正交关系（1896）

表示的定义，表示的特征标（1897）

诱导表示，Frobenius互反律（1898）

特征标的计算：$PSL_2(p)$ (1896), S_n (1900), A_n (1901)

历史III-有限群的表示3

Burnside:

有限群表示理论的应用。

1904：$|G| = p^a q^b \Longrightarrow G$可解

猜想：奇数阶有限群可解（1911）

历史III-有限群的表示4

Schur:
Schur引理（1905），特征标理论的新视角

引进射影表示（1907）

$$G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})/\{纯量矩阵\}$$

表示的算术性质，Schur指标（1906）

历史III-有限群的表示5

Noether: 现代理论的开始

1929

引进群代数$F[G]$

采用模的语言

历史III-有限群的表示6

Brauer: 模表示理论

$k[G]$的模理论，char$k \mid |G|$

不可约模的分类（1935）

模表示理论与常表示理论的联系

分解矩阵和Cartan矩阵的关系(1937): $C = D'D$

p-块理论和亏群的引进

历史IV-李群和李代数的有限维表示1

$SL_2(\mathbb{C})$和$sl_2(\mathbb{C})$

S. Lie：确定不可约表示（1893）

E. Cartan (1894),

G. Fano (1896):

表示的完全可约性

历史IV-李群和李代数的有限维表示2

A. Hurwitz：酉技巧（1897）

群$G = SL_2(\mathbb{C})$，$G_u = SU(2) = S^3$，

表示$\sigma : G \to GL_n(\mathbb{C})$

多项式P：$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

则$(x \in \mathbb{C}^n)$

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{G_u} P(g^{-1}.x) dv \in \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]^G$$

历史IV-李群和李代数的有限维表示3

群$G = SL_2(\mathbb{C})$，$G_u = SU(2) = S^3$，

表示$\sigma : G \to GL_n(\mathbb{C})$

$H(\ ,\ )$：$\mathbb{C}^n$上的正定非退化厄密形

则$(x, y \in \mathbb{C}^n)$

$\hat{H}(x, y) = \int_{G_u} H(g^{-1}.x, g^{-1}.y)dv$

G_u不变，正定非退化。

从而G的有限维表示完全可约

历史IV-李群和李代数的有限维表示4

A. Hurwitz：酉技巧（1897）$SL_n(\mathbb{C})$和$SO_n(\mathbb{C})$表示的完全可约性。

Casimir：引进Casimir算子证明$sl_2(\mathbb{C})$表示的完全可约性

引进一般情形的Casimir算子（1931）

历史IV-李群和李代数的有限维表示5

E. Cartan: 构造了复单李代数的所有不可约表示（1913）

Schur：SU_n和SO_n的特征标，完全可约性（1922，用Hurwitz1897的方法）

历史IV-李群和李代数的有限维表示6

H. Weyl:
对复半单李群、复半单李代数、紧李群证明了完全可约性，给出了表示的特征标（1926）

李群整体理论的开始。

对E. Cartan的影响

历史IV-李群和李代数的有限维表示7

Peter-Weyl（1927）：紧拓扑群上的调和分析奠基之作，也是群上调和分析的开端。

Peter-Weyl定理。

Weyl (1928): 《Gruppentheorie und Quantenmechanik》

历史IV-李群和李代数的有限维表示8

Pontryajin (1934), van Kampen (1935): 局部紧的交换拓扑群的Pontryajin对偶

van der Waerden（1935）：复半单李代数的有限维表示的完全可约性的代数证明

Brauer（1936）：另一个代数证明

历史IV-李群和李代数的无限维表示

E. Wigner: Poincaré群的不可约（射影）酉表示（1939）

V. Bargmann: Lorentz群的不可约酉表示（1947）

I.M. Gelfand和M.A. Naimark: $SL_2(\mathbb{C})$的不可约酉表示的分类（1947）

1950以后

I.M. Gelfand， Harish-Chandra,

Selberg, A. Weil, Grothendieck,

Borel, Langlands, Deligne,

Kazhdan, Drinfeld, Lafforgue,

Bernstein, Beilinson, V. Kac,

Lusztig, ...